第 46 卷 第 4 期
2023 年 4 月

核 技 术 NUCLEAR TECHNIQUES
www.hjs.sinap.ac.cn

Vol.46，No.4
April 2023

QCD临界终点与重子数扰动

许 坤 黄 梅
（中国科学院大学 核科学与技术学院 北京 101400）

摘要 相对论性重离子对撞的目的之一是寻找量子色动力学（Quantum Chromodynamics，QCD）临界终点（Critical End Point，CEP），实验中测到的净质子数扰动呈现出非单调的行为，这暗示了CEP的存在。本文使用了3味PNJL（Polyakov-loop Nambu-Jona-Lasinio）模型，沿着从实验数据中拟合的化学冻结线，计算了重子数扰动累积量之比 C_4/C_2 随对撞能量的变化。结果发现，基于平衡态假设，在对撞能量7.7~200 GeV范围内，随着对撞能量的降低，C_4/C_2 先缓慢下降后上升，这与实验数据一致。这也暗示平衡态假设可以用于探索重离子对撞后系统的演化行为，揭示了相变线跟化学冻结线的关系对观测量的影响非常重要。

关键词 QCD相图，临界终点，重离子对撞，重子数扰动
中图分类号 TL99，TO571.6，TO572.2
DOI: 10.11889/j.0253-3219.2023.hjs.46.040005

QCD critical end point and baryon number fluctuation

XU Kun HUANG Mei
(*School of Nuclear Science and Technology, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 101400, China*)

Abstract One of the main goals of relativistic heavy-ion collision (HIC) is to search for the critical end point (CEP) of quantum chromodynamics (QCD), and distribution of the net-proton number from experimental measurements shows non-monotonic behavior, which indicates the existence of a CEP. The purpose of this work is to investigate the relationship between the net-proton number fluctuation and collision energy, and to explain the experimentally measured behavior. This study investigates the three-flavor Polyakov-loop Nambu-Jona-Lasinio (PNJL) model, which contains quark degrees from the NJL (Nambu-Jona-Lasinio) model and effective gluon contributions from Polyakov-loop, based on the equilibrium assumption and mean-field approximation. In addition, we study the phase diagram and C_4/C_2 of baryon number fluctuation as a function of collision energy along the freeze-out lines fitted from experimental data. With an appropriate form of freeze-out line, the collision energy decreases in the region of 7.7~200 GeV, and C_4/C_2 decreases slightly then increases, which is in agreement with the experimental data. Additionally, these results indicate that the equilibrium assumption is appropriate for the exploration of the system evolution after HIC, and the relationship between the freeze-out and phase transition lines is highly sensitive for observables.

Key words QCD phase diagram, Critical end point, Heavy-ion collision, Baryon number fluctuation

作为描述强相互作用的标准理论，量子色动力学（Quantum Chromodynamics，QCD）所蕴含的相结

国家自然科学基金(No.12147150, No.12235016, No.12221005, No.11725523, No.11735007)资助
第一作者：许坤，男，1994年出生，2021年于中国科学院高能物理研究所获博士学位，目前为博士后，研究领域为高能核物理
通信作者：黄梅，E-mail：huangmei@uacs.ac.cn
收稿日期：2022-12-12，修回日期：2023-02-08
Supported by National Natural Science Foundation of China (No.12147150, No.12235016, No.12221005, No.11725523, No.11735007)
First author: XU Kun, male, born in 1994, graduated from Institute of High Energy Physics, Chinese Academy of Sciences with a doctoral degree in 2021, currently a postdoctoral fellow, focusing on high-energy nuclear physics
Corresponding author: HUANG Mei, E-mail: huangmei@uacs.ac.cn
Received date: 2022-12-12, revised date: 2023-02-08

构是近些年的研究热点，在极端条件下，QCD物质会呈现出完全不同于真空下的形态。随着温度的升高，QCD物质会从强子气态变为夸克胶子等离子体（Quark-Gluon Plasma，QGP），自由度也从强子转变为夸克和胶子，格点QCD（Lattice QCD）发现在小化学势时手征相变与退禁闭相变均为光滑过渡（Crossover）[1−3]。另一方面，从对称性分析以及手征有效模型计算，人们普遍认为在高化学势处发生一级手征相变。因此，根据朗道相变理论，在有限温度有限化学势处则存在一级相变终点，即QCD临界终点（Critical End Point，CEP）[1−17]。

高温高密的极端环境与早期宇宙演化及天体物理有很强的相关性，高密环境存在于致密星内部，比如中子星。强相互作用物质在有限温度有限密度时的状态方程，直接影响了中子星质量-半径关系。在实验室中通过重离子对撞（Heavy Ion Collision，HIC）产生高温高密的环境，是研究强相互作用物质在极端条件下性质的重要场所，比如研究轻核性质[18]、流体性质[19−22]、输运性质[23−24]、重味粒子性质[25−27]、磁场与自旋极化[28−35]，以及本文重点介绍的QCD相图以及QCD临界点。

在重离子对撞中，假设化学冻结线与相边界足够近，那么相图信息则可以通过守恒荷的扰动呈现出来。据预测，这些守恒荷对关联长度非常敏感。因此在重离子对撞中，通过分析逐事件的重子数、电荷以及奇异数的扰动，尤其是它们的累积量，能够揭示RHIC（Relativistic Heavy-ion Collision）以及LHC（Large Hadron Collider）的重离子对撞中产生的物质的热力学性质。对于任一守恒荷，假设N为一次对撞事件的测量结果，在大量记录事件中，此守恒荷的累积量（cumulant）定义如下：

$$\begin{aligned} C_1 &= \langle N \rangle \\ C_2 &= \langle (\delta N)^2 \rangle \\ C_3 &= \langle (\delta N)^3 \rangle \\ C_4 &= \langle (\delta N)^4 \rangle - 3\langle (\delta N)^2 \rangle^2 \end{aligned} \tag{1}$$

其中：$\delta N = N - \langle N \rangle$，这些累积量与不同矩直接的关系为：

$$M = C_1, \sigma^2 = C_2, S = \frac{C_3}{(C_2)^{3/2}}, \kappa = \frac{C_4}{(C_2)^2} \tag{2}$$

其中：M、σ^2、S、κ分别为对应守恒荷的平均值（Mean）、方差（Variance）、偏度（Skewness）以及峰度（Kurtosis）。在实验中，累积量是与系统体积成正比的，为了消除体积带来的影响，人们往往使用累积量的比值，例如：

$$\sigma^2/M = \frac{C_2}{C_1}, S\sigma = \frac{C_3}{C_2}, \kappa\sigma^2 = \frac{C_4}{C_2} \tag{3}$$

有了以上的定义，就可以在给定的对撞能量$\sqrt{s_{NN}}$下，通过测量逐事件的净质子分布计算各个累积量及其比值。

RHIC的能量束流扫描计划（Beam Energy Scan，BES）通过金-金对撞，测量了净质子数、净电荷数以及净K介子数分布的累积量，对撞能量$\sqrt{s_{NN}}$为7.7 GeV、11.5 GeV、14.5 GeV、19.6 GeV、27 GeV、39 GeV、54.4 GeV、62.4 GeV以及200 GeV，其结果见文献[36−39]。实验结果显示，在金-金中心对撞中，净质子数分布的C_4/C_2出现了随对撞能量的非单调的行为：在对撞能量为200 GeV时，C_4/C_2约为1，随着对撞能量的下降，C_4/C_2先在对撞能量为20 GeV时降低到0.1，然后又在对撞能量为7.7 GeV时迅速升高到3.5左右。STAR最新的3 GeV固定靶实验结果以及HADES的2.4 GeV对撞都显示了C_4/C_2为负值[39]。从以上的实验数据中观测到重子数扰动的震荡行为，我们需要知道可以从中提取关于CEP的何种信息以及CEP位于相图中的何处。一方面，应该从沿着化学冻结线的测量结果中提取关于QCD相变的有效信息；另一方面，也应该小心地探索QCD相变如何影响诸如守恒量的累积量等性质。图1展示了在3 GeV对撞能量以及HADES在2.4 GeV对撞能量下的结果[39]。

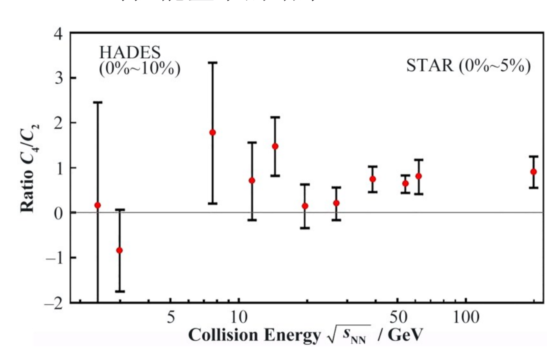


图1 STAR测量的金-金对撞中，净质子数的C_4/C_2随对撞能量的变化

Fig.1 Variation of the ratios of cumulants, C_4/C_2, with collision energy for net-proton measured by STAR

要理解实验中出现的非单调的行为，就需要从理论上研究中质子数扰动随对撞能量的行为。对于平衡态系统，一般在理论中可以定义热力学势，形式为：

$$\Omega = -\frac{T}{V}\ln\left(Z(V, T, \mu_B, \mu_Q, \mu_S)\right) \tag{4}$$

式中：T为温度；V为系统体积；Z为配分函数；μ_B、μ_Q、μ_S分别为重子数化学势、电荷数化学势以及奇异数化学势。有了热力学势，系统的压强也就自然知道了：$P = -\Omega$。守恒荷的敏感度（susceptibility）定义为无量纲压强对相应化学势的导数：

$$\chi_{ijk}^{\mathrm{BQS}} = \frac{\partial^{i+j+k}(P/T^4)}{\partial\hat{\mu}_{\mathrm{B}}^i \partial\hat{\mu}_{\mathrm{Q}}^j \partial\hat{\mu}_{\mathrm{S}}^k} \tag{5}$$

式中：$\hat{\mu}_q = \mu_q/T$, q = B, Q, S。这些守恒荷分布的累积量与对应敏感度的关系为：

$$C_{ijk}^{\mathrm{BQS}} = \frac{\partial^{(i+j+k)} \ln(Z(V,T,\mu_{\mathrm{B}},\mu_{\mathrm{Q}},\mu_{\mathrm{S}}))}{\partial\hat{\mu}_{\mathrm{B}}^i \partial\hat{\mu}_{\mathrm{Q}}^j \partial\hat{\mu}_{\mathrm{S}}^k} = VT^3 \chi_{ijk}^{\mathrm{BQS}}(T,\mu_{\mathrm{B}},\mu_{\mathrm{Q}},\mu_{\mathrm{S}}) \tag{6}$$

通过这个关系，就可以在理论上计算重子数扰动随着温度、化学势以及对撞能量的变化，并与实验结果进行比较，进而提取关于QCD相变的信息。

在不同的模型中，基本自由度及其相互作用的形式不同，配分函数也不同，因此得到的热力学性质以及相变也就不同。人们使用了不同的模型，在理论中对QCD临界点进行广泛地分析过，比如Nambu-Jona-Lasinio（NJL）模型，使用Polyakov-loop改进的NJL模型（PNJL）、线性σ模型、夸克-介子（Quark-Meson，QM）模型、Polyakov-loop改进的夸克-介子模型、Dyson - Schwinger方程（DSE）、全息QCD模型[1-13,40]。另外，利用流体模型分析重子数扰动以及重离子对撞中其他现象也是目前主流的方法[41-44]。然而，不同的模型，甚至是相同的模型使用不同的参数，给出的CEP的位置都不同[45]。因此，结合理论与实验的结果探索CEP是否存在甚至确定CEP的位置是必要的。

1 强子共振气模型

在低温低密的时候，强子是强相互作用物质的主要自由度，随着温度的升高，自由度就由强子变为夸克和胶子。在强子共振气（Hadron Resonance Gas，HRG）模型中，无相互作用的强子以及共振态是基本自由度。在玻尔兹曼近似下，系统的压强为[46-48]：

$$\begin{aligned}\frac{P}{T^4} &= \frac{1}{VT^3}\ln(Z(V,T,\mu_{\mathrm{B}},\mu_{\mathrm{Q}},\mu_{\mathrm{S}})) \\ &= \frac{1}{\pi^2}\sum_i g_i\left(\frac{m_i}{T}\right)^2 K_2\left(\frac{m_i}{T}\right)\times \\ &\quad \cosh(B_i\hat{\mu}_{\mathrm{B}} + Q_i\hat{\mu}_{\mathrm{Q}} + S_i\hat{\mu}_{\mathrm{S}})\end{aligned} \tag{7}$$

式中：m_i是强子i的质量；g_i是其简并度；K_2是修正贝塞尔函数。求和遍历所有的强子以及共振态，包括对应的反粒子。由HRG得到的结果一般可以作为在重离子对撞中寻找QCD相变以及临界点的基线。对于净重子数扰动来说，累积量的比率的形式非常简单，在玻尔兹曼近似下，重子数敏感度的形式可以写为：

$$\chi_{2n}^B = \sum_i g_i\left(\frac{m_i}{T}\right)^2 K_2\left(\frac{m_i}{T}\right)\times \cosh(B_i\hat{\mu}_{\mathrm{B}} + Q_i\hat{\mu}_{\mathrm{Q}} + S_i\hat{\mu}_{\mathrm{S}}) \tag{8}$$

$$\chi_{2n-1}^B = \sum_i g_i\left(\frac{m_i}{T}\right)^2 K_2\left(\frac{m_i}{T}\right)\times \sinh(B_i\hat{\mu}_{\mathrm{B}} + Q_i\hat{\mu}_{\mathrm{Q}} + S_i\hat{\mu}_{\mathrm{S}}) \tag{9}$$

因此，考虑质子，也就是$B = 1$，重子数敏感度的比率为：

$$\begin{aligned}&\frac{C_{\mathrm{even}}^B}{C_{\mathrm{even}}^B} = \frac{\chi_{\mathrm{even}}^B}{\chi_{\mathrm{even}}^B} = 1, \\ &\frac{C_{\mathrm{odd}}^B}{C_{\mathrm{odd}}^B} = \frac{\chi_{\mathrm{odd}}^B}{\chi_{\mathrm{odd}}^B} = 1, \\ &\frac{C_{\mathrm{even}}^B}{C_{\mathrm{odd}}^B} = \frac{\chi_{\mathrm{even}}^B}{\chi_{\mathrm{odd}}^B} = \coth(\mu_{\mathrm{B}}/T)|_{\mu_{\mathrm{Q}}=\mu_{\mathrm{S}}=0}\end{aligned} \tag{10}$$

本文关注的四阶与二阶累积量的比值则为：

$$\kappa_B\sigma_B^{\ 2} = \frac{C_{B,4}}{C_{B,2}} = 1 \tag{11}$$

也就是说，在低温低密的强子相，$C_4/C_2 = 1$，这可以作为强子相的信号。而随着温度的升高到相变温度（约150 MeV），强子逐渐"融化"，系统的主要自由度变为夸克和胶子，因此C_4/C_2也会逐渐偏离1，这也是发生相变的判据之一。

2 格点QCD（Lattice QCD）

格点QCD是通过没有任何假设的第一性原理——即量子色动力学进行计算的非微扰方法，完全可以用于计算处于热平衡系统的强相互作用体系的热力学性质。由于"符号问题"，格点QCD无法直接计算有限化学势的区域，但是通过泰勒展开技巧，可以近似计算小化学势的区域。具体来说，有限化学势μ_{B}时的压强可以展开为[49]：

$$\begin{aligned}\frac{P(T,\mu_{\mathrm{B}}) - P(T,0)}{T^4} &= \frac{1}{2}\chi_2^B(T)\left(\frac{\mu_{\mathrm{B}}}{T}\right)^2\times\Big[1 + \\ &\quad \frac{1}{12}\frac{\chi_4^B(T)}{\chi_2^B(T)}\left(\frac{\mu_{\mathrm{B}}}{T}\right)^2 + \frac{1}{360}\frac{\chi_6^B(T)}{\chi_4^B(T)}\left(\frac{\mu_{\mathrm{B}}}{T}\right)^4\Big] + \\ &\quad O(\mu_{\mathrm{B}}^8)\end{aligned} \tag{12}$$

由于QCD的对称性，奇数项贡献为零，只有偶数项有不为零。可以看到，展开系数与重子数的敏感度χ_2^B、χ_4^B/χ_2^B以及χ_6^B/χ_2^B有关。

同样的原理，也可以利用重子数敏感度计算有限化学势下的值：

$$\chi_n^B(T,\mu_{\mathrm{B}}) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\chi_{n+k}^B(T)\left(\frac{\mu_{\mathrm{B}}}{T}\right)^k \tag{13}$$

图2展示了格点QCD[2,49]计算的零化学势下χ_4^B/χ_2^B随温度的变化以及压强在不同的化学势下随温度的变化。可以看到，在低温下与HRG的结果符

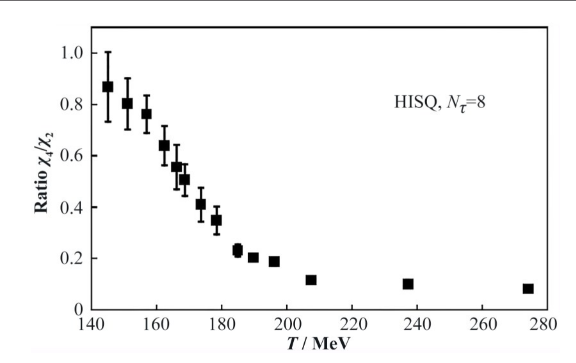


图2 BNL-Bielefeld-CCNU通过格点QCD计算的在零化学势下，χ_4^B/χ_2^B随温度的变化

Fig.2 Lattice QCD result for χ_4^B/χ_2^B as a function of temperature at zero baryon chemical potential from BNL-Bielefeld-CCNU collaboration

合[2]；在趋向于零温时，χ_4^B/χ_2^B趋向于HRG模型的结果，即$\chi_4^B/\chi_2^B = 1$。如果要计算大化学势的区域，则需要计算到更高阶的结果，这就需要更多的计算，花费更多的时间。目前格点QCD的计算通过泰勒展开还不能推广到足够高的化学势，在能够应用泰勒展开的区域目前没有发现CEP的存在。

3 3味Polyakov-loop Nambu-Jona-Lasinio模型

为了能够研究有限温度有限化学下的相图，使用合适的有效模型进行计算是非常必要的。NJL（Nambu-Jona-Lasinio）模型经常被用来研究QCD相图，但是NJL模型给出的相变温度比格点QCD计算结果高，因此，选用3味的Polyakov-loop改进的NJL模型，这个模型给出的手征相变温度跟格点结果相当，因此被叫做实际的NJL模型（简写rPNJL，即realistic PNJL），rPNJL模型考虑了8夸克相互作用。这里直接写出有限温度、有限化学势下的平衡态系统的热力学势[50–51]：

$$\begin{aligned}\Omega = {} & g_s\sum_f \sigma_f^2 - \frac{g_D}{2}\sigma_u\sigma_d\sigma_s + 3\frac{g_1}{2}\left(\sum_f \sigma_f^2\right)^2 + 3g_2\sum_f\sigma_f^4 - 6\int_0^\Lambda \frac{d^3p}{(2\pi)^3}E_f - \\ & 2T\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\ln\left[1 + 3\left(\Phi + \bar{\Phi}e^{-(E_f-\mu_f)/T}\right)e^{-(E_f-\mu_f)/T} + e^{-3(E_f-\mu_f)/T}\right] - \\ & 2T\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\ln\left[1 + 3\left(\bar{\Phi} + \Phi e^{-(E_f+\mu_f)/T}\right)e^{-(E_f+\mu_f)/T} + e^{-3(E_f+\mu_f)/T}\right] + \\ & U'\left(\Phi,\bar{\Phi},T\right)\end{aligned} \tag{14}$$

式中：第一行为真空部分的能量；第二行与第三行则为夸克在有限温度有限化学势下的贡献；第四行为Polyakov-loop的贡献。g_s, g_D, g_1, g_2分别为夸克相互作用的耦合常数；$\sigma_f = \left\langle\bar{\psi}_f\psi_f\right\rangle$为夸克凝聚；$f = u, d$对应两味轻夸克而$f = s$对应奇异夸克。$E_f = \sqrt{p^2 + M_f^2}$为夸克的色散关系，其中动力学质量$M_f$的形式为：

$$M_f = m_f - 2g_s\sigma_f + \frac{g_D}{4}\sigma_{f+1}\sigma_{f+2} - 2g_1\sigma_f\sum_{f'}\sigma_{f'}^2 - 4g_2\sigma_f^3 \tag{15}$$

如果$\sigma_f = \sigma_u$，那么$\sigma_{f+1} = \sigma_d$、$\sigma_{f+2} = \sigma_s$。由于NJL模型部分为不可重整的，因此就需要合适的正规化机制消除无穷大。这里使用三动量截断，动量积分上限为Λ。

NJL模型只有夸克自由度，没有胶子自由度，因此也就没有禁闭效应。为了弥补这一问题，此处考虑了Polyakov-loop，即Φ和$\bar{\Phi}$，来模拟胶子的部分效应，第二行与第三行中展示了其与夸克的相互作用。而Φ和$\bar{\Phi}$的自相互作用则是由U'描述，其形式为[52]：

$$\frac{U'}{T^4} = \frac{U}{T^4} - \kappa\ln\left[J\left(\Phi,\bar{\Phi}\right)\right] \tag{16}$$

其中：

$$\frac{U}{T^4} = -\frac{b_2(T)}{2}\bar{\Phi}\Phi - \frac{b_3}{6}(\Phi^3 + \bar{\Phi}^3) + \frac{b_4}{4}(\bar{\Phi}\Phi)^2 \tag{17}$$

为Polyakov-loop的在有限温度下的有效势，以及：

$$J = \left(\frac{27}{24\pi^2}\right)\left(1 - 6\Phi\bar{\Phi} + 4(\Phi^3 + \bar{\Phi}^3) - 3(\Phi\bar{\Phi})^2\right) \tag{18}$$

是Polyakov-loop到它的迹的变换的雅克比行列式。除此之外，κ是一个无量纲的参数，用来限制Φ和$\bar{\Phi}$的值在0~1之间。$b_2(T)$是温度依赖的系数，其形式为：

$$b_2(T) = a_0 + a_1\frac{T_0}{T}\exp\left(-a_2\frac{T}{T_0}\right) \tag{19}$$

根据文献[50]，模型中NJL部分的参数可以通过真空的性质来确定，Polyakov-loop部分的参数则可以通过零化学势时的压强密度来拟合，这些参数的具体值展现在表1与表2中。

在平衡态系统的假设下，夸克凝聚σ_f以及Φ和$\bar{\Phi}$是自由变量，其值可以通过能隙方程组获得：

表1 rPNJL模型中NJL部分的参数
Table 1 Parameters for the NJL part in the rPNJL model

$m_{u/d}$ / MeV	m_s / MeV	Λ / MeV	$g_s\Lambda^2$	$g_D\Lambda^5$	g_1 / MeV^{-8}	g_2 / MeV^{-8}
5.5	183.468	637.720	2.914	75.968 7	2.193×10^{-21}	-5.890×10^{-22}

表2 rPNJL中Polyakov-loop部分参数
Table 2 Parameters for the Polyakov-loop part in the rPNJL model

T_0 / MeV	a_0	a_1	a_2	b_3	b_4	κ
175	6.75	−9.8	0.26	0.805	7.555	0.1

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\sigma_f}=0,\ \frac{\partial\Omega}{\partial\Phi}=0,\ \frac{\partial\Omega}{\partial\bar{\Phi}}=0 \tag{20}$$

需要注意的是，在零重子数化学势时，Φ和$\bar{\Phi}$的值相等，但是在有限化学势时则不相等。得到夸克凝聚σ_f以及Φ和$\bar{\Phi}$在给定温度与化学势下的值，就可以通过式(5)与式(6)计算重子数扰动C_4、C_2以及$\kappa\sigma^2$。在零化学势时，利用上述参数计算得到的重子数扰动$\kappa\sigma^2$随温度的变化展示在图3中，其中T_0^χ = 166 MeV，为rPNJL给出的零化学势下的相变温度，在强子共振气极限下$\kappa\sigma^2=1$，在自由夸克气极限时$\kappa\sigma^2$约0.068。

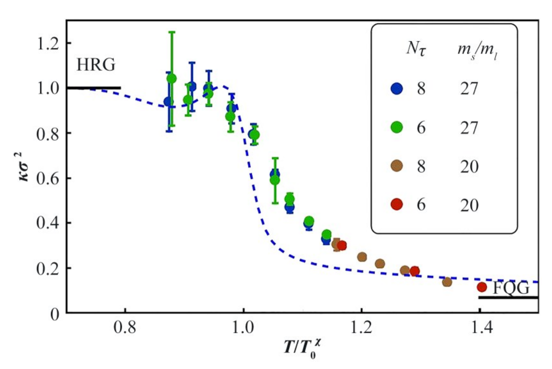


图3 在零重子数密度下利用rPNJL模型计算得到的重子数扰动的$\kappa\sigma^2$与温度的关系[51]
Fig.3 Variation of the kurtosis of baryon number fluctuation $\kappa\sigma^2$ in the rPNJL model as a function of the temperature at zero baryon number density[51]

图3中虚线为rPNJL模型的结果，不同的点取自格点QCD的计算[50−51]。横坐标为归一化的温度，其中，T_0^χ = 166 MeV为rPNJL模型得出的零化学势下的相变温度。可以看到，$\kappa\sigma^2$在低温下趋向于1，这正是HRG模型给出的低温下的结果；而在高温下则趋向于自由夸克气的结果，即$\kappa\sigma^2$约0.068。整体上rPNJL模型计算的$\kappa\sigma^2$与格点的结果比较吻合。

4 结果和讨论

为了确定重子数扰动$\kappa\sigma^2$随对撞能量的变化关系，需要先确定化学冻结线的形式。此处选取了两条化学冻结线的形式f1与f2。f2的形式为：

$$T(\mu)=0.158-0.14\mu^2-0.04\mu^4$$

这个形式取自文献[38]，是基于RHIC实验[53]数据中拟合的，f1则是在f2的基础上做了微调，其表达式为：

$$T(\mu)=0.158-0.14\mu^2-0.04\mu^4-0.01\exp(-(\mu-0.067)/0.05)$$

式中：温度T和重子数化学势μ_B的单位都是GeV，下同。

图4同时展示了rPNJL模型计算得到的相图，其中：CEP的位置为(μ_B^E = 720 MeV，T^E = 93 MeV)，即图中的黑色三角形处；黑线为一级相变线；蓝色虚线为crossover；浅蓝色点为RHIC的BES-I对撞结果；圆点与黑色方块分别为RHIC BES-I[53−55]以及低能重离子对撞中化学冻结出的温度与化学势[56]；同时，红色与蓝色虚线分别是两条化学冻结线f1和f2。可以看出，f1与f2的不同主要体现在小化学势附近，也就是高对撞能量下：化学冻结线f1从相边界的“后方”开始，而f2则从相边界的“前方”开始。另外，为了与实验结果，即$\kappa\sigma^2$与对撞能量的关系，相比较，还需要重子数化学势与对撞能量的关系，具体形式如下：

$$\mu_B(\sqrt{s})=\frac{1.477}{1+0.343\sqrt{s}} \tag{21}$$

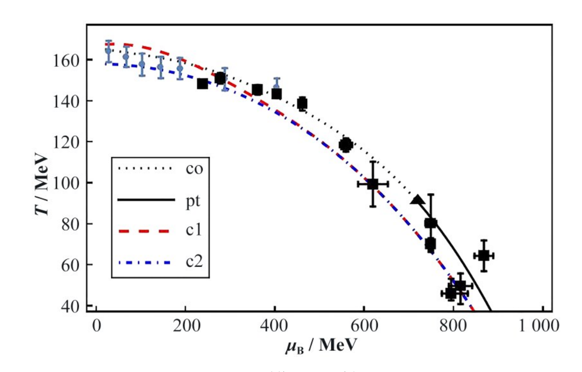


图4 rPNJL模型计算的相图[51]
Fig.4 Chiral phase-transition line in the rPNJL model and freeze-out lines extracted from experiments[51]

最终，rPNJL计算的$\kappa\sigma^2$沿着化学冻结线f1和f2的行为展示在图5中，分别为红色虚线与蓝色虚线；绿色虚线为NJL计算的结果[57]；黑点为STAR的净质子数测量结果[39]。

首先选用化学冻结线f1，它是从相边界的“后方”开始，可以看到，沿着f1，rPNJL模型计算的重子数扰动$\kappa\sigma^2$随着对撞能量的降低，首先展现出了一个“下凹”结构，最低值大约处于$\sqrt{s}$ = 20 GeV，随着对

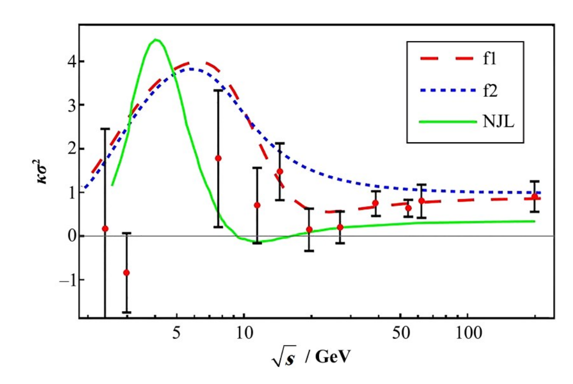


图5 rPNJL模型计算的重子数$\kappa\sigma^2$随对撞能量的变化行为[51]

Fig.5 $\kappa\sigma^2$ as a function of collision energy from the rPNJL model[51]

撞能量继续降低，在$\sqrt{s}$ = 6 GeV处出现一个峰结构，随后$\kappa\sigma^2$降低，最终降为1左右。这个整体的行为与STAR实验测量的$\sqrt{s}$ ⩾ 7.7 GeV的结果符合得很好。沿着第二条化学冻结线f2，也就是从相边界的前方出发，$\kappa\sigma^2$只有在$\sqrt{s}$ = 6 GeV产生一个峰结构，而没有"下凹"结构出现。作为比较，文献[10]使用的NJL模型计算的结果与实验结果差距较大。

由此可以看出，重子数的$\kappa\sigma^2$随着对撞能量先下降后上升的行为，与QCD相变有着密切的关系：在小化学势时（即高能对撞），化学冻结线要穿过crossover的区域，从QGP相到强子气相；随着对撞能量降低，化学冻结线逐渐靠近CEP并从其附近擦过，因此$\kappa\sigma^2$逐渐增大后又降低，形成峰结构，此处的峰结构就是CEP存在的标志。

在3 GeV以及更低的能量下，实验结果显示了负值，目前通常认为这是由于低能下的重子数守恒效应导致的[60]。这个结果无法从本文中使用的rPNJL模型得出，从图5中可以看到，在低对撞能量下，$\kappa\sigma^2$趋向于1而不是负值，这说明rPNJL模型无法描述高化学势的相变行为和相结构，这或许是由于rPNJL模型中只有夸克自由度，而缺少强子，后者是强子气相的主要自由度。一种可能的原因是，强子相在低温有限化学势处存在强子的气液相变，进而也会有相应临界终点，在低能打靶实验中，产生的系统的化学势较大而温度很低，接近强子气液相变的临界终点区域，正如QCD手征相变CEP附近的负值区域类似，此时也有可能出现$\kappa\sigma^2$为负的结果。

5 结语

由于守恒荷在相变附近会出现剧烈的扰动，因此，在重离子对撞中可以通过重子数扰动来寻找CEP。使用3味的PNJL模型，其在零化学势时重子数扰动与格点结果一致。利用通过实验数据拟合的化学冻结线方程，计算了重子数扰动的$\kappa\sigma^2$随对撞能量的变化关系，令人惊讶的是，计算结果基本符合实验数据的趋势，在$\sqrt{s}$ = 7.7 GeV处产生的峰结构，是CEP存在的标志。考虑到实验观测到的物理量为系统化学冻出时的状态，而此时系统已经演化到平衡态，因此，本文中基于平衡态假设的计算结果展现出与实验数据较好的符号，这或许意味着在理论中基于平衡态假设探索重离子对撞后系统演化行为是合理的。另外需要强调一点的是，得到跟实验结果相符合的结果，最主要的原因是以下几点：1）模型在零密给出了合理的相变温度，并预言了比较合理的临界终点位置，由此给出了比较合理的相变线；2）相变线跟化学冻结线的位置关系对最终$\kappa\sigma^2$随对撞能量的变化关系非常敏感。想强调的一点是$\kappa\sigma^2$随碰撞能量降低并在碰撞能量19.6 GeV处的最低点是由于在低化学势情况下化学冻结线高于相变线决定的。

作者贡献声明 许坤完成论文初稿的写作与稿件的修改；黄梅提供论文撰写思路及修改稿件。

参考文献

1 Fodor Z, Katz S D. A new method to study lattice QCD at finite temperature and chemical potential[J]. Physics Letters B, 2002, **534**(1 – 4): 87 – 92. DOI: 10.1016/S0370-2693(02)01583-6.

2 Ding H T, Karsch F, Mukherjee S. Thermodynamics of strong-interaction matter from lattice QCD[M]. Quark-Gluon Plasma 5. World Scientific, 2016: 1 – 65. DOI: 10.1142/9789814663717_0001.

3 Schmidt C, Sharma S. The phase structure of QCD[J]. Journal of Physics G, 2017, **44**(10): 104002. DOI: 10.1088/1361-6471/aa824a.

4 Pisarski R D, Wilczek F. Remarks on the chiral phase transition in chromodynamics[J]. Physical Review D, 1984, **29**(2): 338 – 341. DOI: 10.1103/physrevd.29.338.

5 Hatta Y, Ikeda T. Universality, the QCD critical and tricritical point, and the quark number susceptibility[J]. Physical Review D, 2003, **67**: 014028. DOI: 10.1103/physrevd.67.014028.

6 Schwarz T M, Klevansky S P, Papp G. Phase diagram and bulk thermodynamical quantities in the Nambu-Jona-Lasinio model at finite temperature and density[J]. Physical Review C, 1999, **60**(5): 055205. DOI: 10.1103/physrevc.60.055205.

7 Bowman E S, Kapusta J I. Critical points in the linear σ model with quarks[J/OL]. Physical Review C, 2009, **79**:

015202. DOI: 10.1103/PhysRevC.79.015202.

8 Mao H, Jin J S, Huang M. Phase diagram and thermodynamics of the Polyakov linear sigma model with three quark flavors[J]. Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics, 2010, **37**(3): 035001. DOI: 10.1088/0954-3899/37/3/035001.

9 Schaefer B J, Wagner M. QCD critical region and higher moments for three-flavor models[J]. Physical Review D, 2012, **85**(3): 034027. DOI: 10.1103/physrevd.85.034027.

10 Schaefer B J, Wagner M. Higher-order ratios of baryon number cumulants[J]. Central European Journal of Physics, 2012, **10**(6): 1326 – 1329. DOI: 10.2478/s11534-012-0115-y.

11 Qin S X, Chang L, Chen H, *et al*. Phase diagram and critical endpoint for strongly-interacting quarks[J]. Physical Review Letters, 2011, **106**(17): 172301. DOI: 10.1103/PhysRevLett.106.172301.

12 Luecker J, Fischer C S, Fister L, *et al*. Critical point and deconfinement from Dyson – Schwinger equations[C]. Proceedings of 8th International Workshop on Critical Point and Onset of Deconfinement (CPOD). 2013: 057. DOI: 10.22323/1.185.0057.

13 Fu W J, Pawlowski J M, Rennecke F, *et al*. Baryon number fluctuations at finite temperature and density[J]. Physical Review D, 2016, **94**(11): 116020. DOI: 10.1103/PhysRevD.94.116020.

14 Stephanov M A. Non-Gaussian fluctuations near the QCD critical point[J]. Physical Review Letters, 2009, **102**(3): 032301. DOI: 10.1103/PhysRevLett.102.032301.

15 Stephanov M A. On the sign of kurtosis near the QCD critical point[J]. Physical Review Letters, 2011, **107**(5): 052301. DOI: 10.1103/PhysRevLett.107.052301.

16 Asakawa M, Ejiri S, Kitazawa M. Third moments of conserved charges as probes of QCD phase structure[J]. Physical Review Letters, 2009, **103**(26): 262301. DOI: 10.1103/PhysRevLett.103.262301.

17 Athanasiou C, Rajagopal K, Stephanov M. Using higher moments of fluctuations and their ratios in the search for the QCD critical point[J]. Physical Review D, 2010, **82**(7): 074008. DOI: 10.1103/physrevd.82.074008.

18 Zhu L L, Wang B, Wang M, *et al*. Energy and centrality dependence of light nuclei production in relativistic heavy-ion collisions[J]. Nuclear Science and Techniques, 2022, **33**(4): 45. DOI: 10.1007/s41365-022-01028-8.

19 Wang M, Tao J Q, Zheng H, *et al*. Number-of-constituent-quark scaling of elliptic flow: a quantitative study[J]. Nuclear Science and Techniques, 2022, **33**(3): 37. DOI: 10.1007/s41365-022-01019-9.

20 Lan S W, Shi S S. Anisotropic flow in high baryon density region[J]. Nuclear Science and Techniques, 2022, **33**(2): 21. DOI: 10.1007/s41365-022-01006-0.

21 Wang H, Chen J H. Anisotropy flows in Pb-Pb collisions at LHC energies from parton scatterings with heavy quark trigger[J]. Nuclear Science and Techniques, 2022, **33**(2): 15. DOI: 10.1007/s41365-022-00999-y.

22 浦实, 黄旭光 . 相对论自旋流体力学[J/OL]. 物理学报, 2023. DOI: 10.7498/aps.72. 20230036.
PU Shi, HUANG Xuguang. Relativistic spin hydrodynamics[J/OL]. Acta Physica Sinica, 2023. DOI: 10.7498/aps.72.20230036.

23 Lin Z W, Zheng L. Further developments of a multi-phase transport model for relativistic nuclear collisions[J]. Nuclear Science and Techniques, 2021, **32**(10): 113. DOI: 10.1007/s41365-021-00944-5.

24 Xu J F. Bulk viscosity of interacting magnetized strange quark matter[J]. Nuclear Science and Techniques, 2021, **32**(10): 111. DOI: 10.1007/s41365-021-00954-3.

25 Su Y, Sun Y J, Zhang Y F, *et al*. Non-extensive statistical distributions of charmed meson production in Pb-Pb and pp($\bar{\mathrm{p}}$) collisions[J]. Nuclear Science and Techniques, 2021, **32**(10): 108. DOI: 10.1007/s41365-021-00945-4.

26 Wang H, Chen J H. Study on open charm hadron production and angular correlation in high-energy nuclear collisions[J]. Nuclear Science and Techniques, 2021, **32**(1): 2. DOI: 10.1007/s41365-020-00839-x.

27 Tang Z B, Zha W M, Zhang Y F. An experimental review of open heavy flavor and quarkonium production at RHIC [J]. Nuclear Science and Techniques, 2020, **31**(8): 81. DOI: 10.1007/s41365-020-00785-8.

28 Gao J H, Ma G L, Pu S, *et al*. Recent developments in chiral and spin polarization effects in heavy-ion collisions [J]. Nuclear Science and Techniques, 2020, **31**(9): 90. DOI: 10.1007/s41365-020-00801-x.

29 Liu Y C, Huang X G. Anomalous chiral transports and spin polarization in heavy-ion collisions[J]. Nuclear Science and Techniques, 2020, **31**(6): 56. DOI: 10.1007/s41365-020-00764-z.

30 Wang F Q, Zhao J. Search for the chiral magnetic effect in heavy ion collisions[J]. Nuclear Science and Techniques, 2018, **29**(12): 179. DOI: 10.1007/s41365-018-0520-z.

31 Hattori K, Huang X G. Novel quantum phenomena

induced by strong magnetic fields in heavy-ion collisions [J]. Nuclear Science and Techniques, 2017, **28**(2): 26. DOI: 10.1007/s41365-016-0178-3.

32 孙旭, 周晨升, 陈金辉, 等. 重离子碰撞中QCD物质整体极化的实验测量[J/OL]. 物理学报, 2023. DOI: 10.7498/aps.72.20222452.
SUN Xu, ZHOU Chensheng, CHEN Jinhui, *et al*. Measurements of global polarization of QCD matter in heavy-ion collisions[J/OL]. Acta Physica Sinica, 2023. DOI: 10.7498/aps.72.20222452.

33 高建华, 黄旭光, 梁作堂, 等. 强相互作用自旋轨道耦合与QGP整体极化[J/OL]. 物理学报, 2023. DOI: 10.7498/aps.72.20230102.
GAO Jianhua, HUANG Xuguang, LIANG Zuotang, *et al*. Spin-orbital coupling in strong interaction and global spin polarization[J/OL]. Acta Physica Sinica, 2023. DOI: 10.7498/aps.72.20230102.

34 江泽方, 吴祥宇, 余华清, 等. RHIC能区Au+Au碰撞中带电粒子直接流与超子整体极化的计算与分析[J/OL]. 物理学报, 2023. DOI: 10.7498/aps.72.20222391.
JIANG Zefang, WU Xiangyu, YU Huaqing, *et al*. The direct flow of charged particles and the global polarization of hyperons in 200 AGeV Au+Au collisions at RHIC[J/OL]. Acta Physica Sinica, 2023. DOI: 10.7498/aps.72.20222391.

35 盛欣力, 梁作堂, 王群. 重离子碰撞中的矢量介子自旋排列[J/OL]. 物理学报, 2023. DOI: 10.7498/aps.72.20230071.
SHENG Xinli, LIANG Zuotang, WANG Qun. Global spin alignment of vector mesons in heavy ion collisions[J/OL]. Acta Physica Sinica, 2023. DOI: 10.7498/aps.72.20230071.

36 Adamczyk L, Adkins J K, Agakishiev G, *et al*. Energy dependence of moments of net-proton multiplicity distributions at RHIC[J]. Physical Review Letters, 2014, **112**: 032302. DOI: 10.1103/PhysRevLett.112.032302.

37 Aggarwal M M, Ahammed Z, Alakhverdyants A V, *et al*. Higher moments of net-proton multiplicity distributions at RHIC[J]. Physical Review Letters, 2010, **105**: 022302. DOI: 10.1103/PhysRevLett.105.022302.

38 Luo X F, Xu N. Search for the QCD critical point with fluctuations of conserved quantities in relativistic heavy-ion collisions at RHIC: an overview[J]. Nuclear Science and Techniques, 2017, **28**(8): 112. DOI: 10.1007/s41365-017-0257-0.

39 Abdallah M S, Aboona B E, Adam J, *et al*. Measurements of proton high order cumulants in $\sqrt{s_{NN}}$= 3 GeV Au+Au collisions and implications for the QCD critical point[J]. Physical Review Letters, 2022, **128**(20): 202303. DOI: 10.1103/PhysRevLett.128.202303.

40 Critelli R, Noronha J, Noronha-Hostler J, *et al*. Critical point in the phase diagram of primordial quark-gluon matter from black hole physics[J]. Physical Review D, 2017, **96**(9): 096026. DOI: 10.1103/physrevd.96.096026.

41 Wu S J, Shen C, Song H C. Dynamically exploring the QCD matter at finite temperatures and densities: a short review[J]. Chinese Physics Letters, 2021, **38**(8): 081201. DOI: 10.1088/0256-307x/38/8/081201.

42 Shen C, Yan L. Recent development of hydrodynamic modeling in heavy-ion collisions[J]. Nuclear Science and Techniques, 2020, **31**(12): 122. DOI: 10.1007/s41365-020-00829-z.

43 Fang R H, Dong R D, Hou D F, *et al*. Thermodynamics of the system of massive Dirac fermions in a uniform magnetic field[J]. Chinese Physics Letters, 2021, **38**(9): 091201. DOI: 10.1088/0256-307x/38/9/091201.

44 Peng H H, Zhang J J, Sheng X L, *et al*. Ideal spin hydrodynamics from the Wigner function approach[J]. Chinese Physics Letters, 2021, **38**(11): 116701. DOI: 10.1088/0256-307x/38/11/116701.

45 Vovchenko V, Steinheimer J, Philipsen O, *et al*. Cluster expansion model for QCD baryon number fluctuations: no phase transition at μ_B/T_π[J]. Physical Review D, 2018, **97**(11): 114030. DOI: 10.1103/physrevd.97.114030.

46 Fu J H. Higher moments of net-proton multiplicity distributions in heavy ion collisions at chemical freeze-out [J]. Physics Letters B, 2013, **722**(1 ‒ 3): 144 ‒ 150. DOI: 10.1016/j.physletb.2013.04.018.

47 Karsch F, Redlich K. Probing freeze-out conditions in heavy ion collisions with moments of charge fluctuations [J]. Physics Letters B, 2011, **695**(1 ‒ 4): 136 ‒ 142. DOI: 10.1016/j.physletb.2010.10.046.

48 Fu J H. Higher moments of multiplicity fluctuations in a hadron-resonance gas with exact conservation laws[J]. Physical Review C, 2017, **96**(3): 034905. DOI: 10.1103/PhysRevC.96.034905.

49 Bazavov A, Ding H T, Hegde P, *et al*. The QCD equation of state to O(μ_B^6) from lattice QCD[J]. Physical Review D, 2017, **95**(5): 054504. DOI: 10.1103/PhysRevD. 95.054504.

50 Bhattacharyya A, Ghosh S K, Maity S, *et al*. Reparametrizing the Polyakov-Nambu-jona-lasinio model

[J]. Physical Review D, 2017, **95**(5): 054005. DOI: 10.1103/physrevd.95.054005.

51 Li Z B, Xu K, Wang X Y, *et al*. The kurtosis of net baryon number fluctuations from a realistic Polyakov-Nambu-Jona-Lasinio model along the experimental freeze-out line [J]. The European Physical Journal C, 2019, **79**(3): 245. DOI: 10.1140/epjc/s10052-019-6703-x.

52 Ghosh S K, Mukherjee T K, Mustafa M G, *et al*. PNJL model with a Van der Monde term[J]. Physical Review D, 2008, **77**: 094024. DOI: 10.1103/PhysRevD.77.094024.

53 Das S. Identified particle production and freeze-out properties in heavy-ion collisions at RHIC Beam Energy Scan program[J]. EPJ Web of Conferences, 2015, **90**: 08007. DOI: 10.1051/epjconf/20159008007.

54 Adamczyk L, Adkins J K, Agakishiev G, *et al*. Bulk properties of the medium produced in relativistic heavy-ion collisions from the beam energy scan program[J]. Physical Review C, 2017, **96**(4): 044904. DOI: 10.1103/PhysRevC.96.044904.

55 Kaczmarek O. Lattice QCD results on soft and hard probes of strongly interacting matter[J]. Nuclear Physics A, 2017, **967**: 137 – 144. DOI: 10.1016/j. nuclphysa.2017.05.106.

56 Begun V V, Vovchenko V, Gorenstein M I. Updates to the p+p and A+A chemical freeze-out lines from the new experimental data[J]. Journal of Physics: Conference Series, 2017, **779**: 012080. DOI: 10.1088/1742-6596/779/1/012080.

57 Fan W K, Luo X F, Zong H S. Mapping the QCD phase diagram with susceptibilities of conserved charges within Nambu-Jona-Lasinio model[J]. International Journal of Modern Physics A, 2017, **32**(11): 1750061. DOI: 10.1142/s0217751x17500610.

58 Braun-Munzinger P, Friman B, Redlich K, *et al*. Relativistic nuclear collisions: establishing a non-critical baseline for fluctuation measurements[J]. Nuclear Physics A, 2021, **1008**: 122141. DOI: 10.1016/j.nuclphysa.2021.122141.